Info : ◇ Examen blanc sur moodle (général)

◇ Examen de l'année passée sur moodle (ressources de révision)

◇ Correction examen blanc prend du retard.

**Théorème 6.25** (Bernoulli - L'Hospital)

Soit $a < x_0 < b$, $f, g : ]a,b[ \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ dérivables et

$\alpha \in \{0, -\infty, +\infty\}$

Supposons que $\forall x \in ]a,b[ \setminus \{x_0\}$, $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$, et

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \alpha$$

(i) Si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, alors, $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$

(ii) Si $f, g : ]a,b[ \to \mathbb{R}$ sont dérivables, $\alpha = 0$ et $g'(x_0) \neq 0$, alors,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

<u>Remarque 6.26</u> : (i) Le résultat est aussi vrai pour des limites latérales ou des limites à l'infini

(ii) ⚠ $\exists$ des fonctions pour lesquelles $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ existe, mais $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ n'existe pas.

$\left( x_0 = 0,\ f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right),\ g(x) = x \right)$

## Exemples 6.27

(i) On a $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} \overset{B.H.}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{1} = \cos(0) = 1.$

(ii) On a $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log(x)}{x} \overset{B.H.}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

(iii) $\lim_{x \to +\infty} x^{14} e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{14}}{\frac{1}{e^{-x}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{14}}{e^{x}}$

$$\overset{BH}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{14x^{13}}{e^x} \overset{BH}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{14 \cdot 13 \cdot x^{12}}{e^x} \overset{BH}{=} \dots \overset{B.H.}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{14!\, x}{e^x}$$

$$\overset{B.H.}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{14!}{e^x} = 0$$

## §6.5 Applications du TAF à l'étude de fonctions

**Proposition 6.28**

Soit $I$ un intervalle, $f: I \to \mathbb{R}$ dérivable tq $\forall x \in I$ $f'(x) = 0$.
Alors, $f$ est constante

**Exemple 6.29**

Soit $f: ]-2,-1[ \cup ]1,2[ \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in ]-2,-1[ \\ 1 & \text{si } x \in ]1,2[ . \end{cases} \Rightarrow f'(x) = 0$$

**Proposition 6.30**

Soit $I$ un intervalle ouvert, et $f: I \to \mathbb{R}$ dérivable. Alors,

(i) $f$ est croissante si et seulement si $\forall x \in I$,

$f'(x) \geq 0$

(ii) si $\forall x \in I$, $f'(x) > 0$, alors, $f$ est strictement croissante

(iii) $f$ est décroissante si et seulement si $\forall x \in I$,

$f'(x) \leq 0$

(iv) si $\forall x \in I$, $f'(x) < 0$, alors, $f$ est strictement décroissante.

<u>Exemple 6.31</u>

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$

Alors, $f$ est strictement croissante (voir détail polycopié p. 104)

Mais $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ qui s'annule en $x = 0$

Petit retour sur les suites définies par récurrence.

$x_0 = a$, $x_{n+1} = f(x_n)$

1) conj. monotonie de $(x_n)$ croissante ou décroissante

2) conj sur $\ell$. $\Rightarrow$ $f$ croissante.

(A) $x_n \nearrow$ Si $\forall x \in [a, \ell]$, $\boxed{f'(x) \geq 0}$, alors $(x_n)$ converge

(B) $x_n \searrow$ Si $\forall x \in [\ell, a]$, $\boxed{f'(x) \geq 0}$, alors $(x_n)$ converge

Ⓐ : Am : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a \le x_n \le \ell$ & $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \le x_{n+1}$

$\iff \forall n \in \mathbb{N}$, $a \le x_n \le x_{n+1} \le \ell$.

Induction : $\boxed{n=0}$ $a \le x_0 \le x_1 \le \ell$

$\boxed{\text{Pas de récurrence}}$ supposons $a \le x_n \le x_{n+1} \le \ell$

Montrons $a \le x_{n+1} \le x_{n+2} \le \ell$.

Vu que $f$ est croissante,

$f(a) \le f(x_n) \le f(x_{n+1}) \le f(\ell)$

$\underline{a} \le x_1 \le \underline{x_{n+1}} \le \underline{x_{n+2}} \le \underline{\ell}$

$\ell$ est solution de $\ell = f(\ell)$

qui est le résultat

# Chapitre 7 L'étude de fonctions

But : $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est continue, trouver $\mathrm{Im}(f)$

## §7.1 Extrema et détermination de l'image.

**Définition 7.1** (extrémum, minimum, maximum)

Soient $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$ une fonction.

On dit que

(i) $f$ admet un minimum local en $x_0$ si

$$\exists \delta > 0 \text{ tq } \forall x \in D, \ |x-x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$$

(ii) $f$ admet un maximum local en $x_0$ si

$\exists \delta > 0$ tq $\forall x \in D$, $|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$

(iii) $f$ admet un extrémum local en $x_0$ si

$f$ admet un minimum local ou un maximum local en $x_0$

(iv) $f$ admet un maximum (global) en $x_0$ si

$\forall x \in D, \quad f(x) \leq f(x_0)$

(v) $f$ admet un minimum (global) en $x_0$ si

$\forall x \in D, \quad f(x) \geq f(x_0)$

(vi) $f$ admet un <u>extrémum (global) en $x_0$</u> si
$f$ admet un minimum ou un maximum global en $x_0$

<u>Remarque 7.2</u>

min/max global en $x_0$ $\Leftrightarrow$ $f$ prend son min/max en $x_0$.

<u>Définition 7.3</u> (Point stationnaire)

Soit $x_0 \in D$, $f : D \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de $x_0$ et dérivable en $x_0$. On dit que $x_0$ est un <u>point stationnaire</u> si $f'(x_0) = 0$

Proposition 7.4 (Extrémum local, condition nécessaire.)

Soit $x_0 \in D$, $f : D \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de $x_0$ et dérivable en $x_0$.

Alors, si $f$ admet un extrémum local en $x_0$, $f'(x_0) = 0$

(Comparer avec Prop. 6.20)

Rappel

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, $f([a,b]) = \left[\min_{x \in [a,b]} f(x), \max_{x \in [a,b]} f(x)\right]$

Qu : $f : \{0, \pi\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x \cos(x)$

$\max f(x) = 1$ $\min f(x) = -e^{+\pi}$

Stratégie : Si $x_0$ réalise $\max_{x\in[a,b]} f(x)$ ou $\min_{x\in[a,b]} f(x)$.

3 possibilités :

1 - $x_0 = a$ ou $x_0 = b$

2 - $x_0 \in ]a,b[$, $f$ n'est pas dérivable en $x_0$

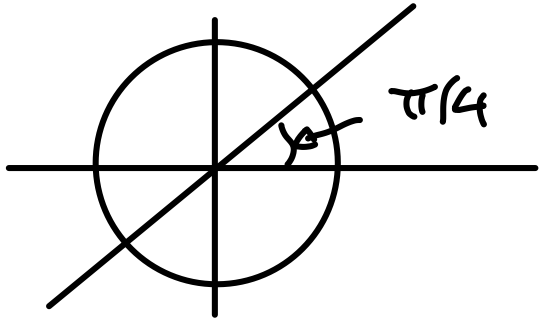
3 - $x_0 \in ]a,b[$, $f$ est dérivable en $x_0$ ($\overset{\text{prop 7.4}}{\Longrightarrow}$ $x_0$ est un point stationnaire)

Exemple 7.5

Soit $f : [0,\pi/2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x \cos(x)$

Les points stationnaires de $f$ dans $]0,\pi/2[$.

$$f'(x) = e^x\cos(x) - e^x\sin(x) = e^x\left(\cos(x) - \sin(x)\right)$$




$$\Longrightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

$f$ est dérivable sur $]0, \pi/2[$, $\Rightarrow$ pas de $x$ tq $f$ pas dérivable aux

Points au bord : $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$.

Donc, min & max de $f$ sont parmi

$$f(\pi/4) = e^{\pi/4}\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad f(0) = 1, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$e^{\pi/4}\frac{\sqrt{2}}{2} \overset{?}{\lesseqgtr} 1 \Leftrightarrow e^{\pi/4} \lesseqgtr \frac{2}{\sqrt{2}} \qquad e^{\pi/2} \lesseqgtr 2$$

$>$ $\qquad$ $>$ $\qquad$ $>$

car $e > 2$, $\pi/2 > 1$

$$\Rightarrow f([0,\pi/2]) = \left[0, e^{\pi/4}\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

<u>Proposition 7.6</u> (extremum local condition suffisante)

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, pair, $I$ un intervalle ouvert, $x_0 \in I$

$f \in C^n(I)$ tq :

$$0 = f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) \text{ et } f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

La 1ère dérivée $\neq 0$ est une dérivée d'ordre pair

Alors,

(i) si $f^{(n)}(x_0) > 0$, $f$ admet un minimum local en $x_0$

(ii) si $f^{(n)}(x_0) < 0$, $f$ admet un maximum local en $x_0$

Si la 1ère dérivée $\neq 0$ est une dérivée d'ordre impair $\Rightarrow$ pt d'inflexion

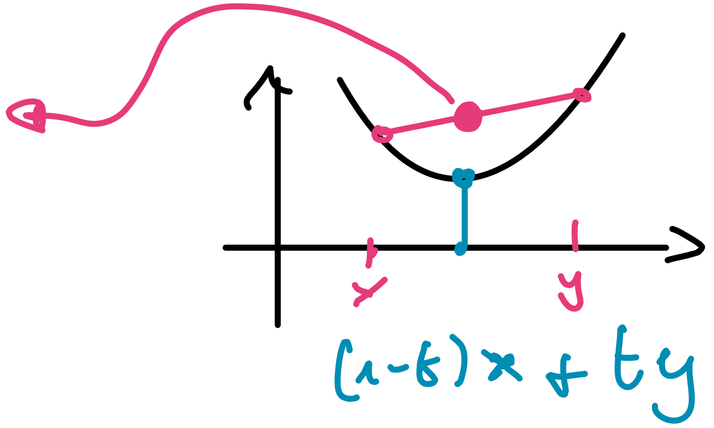
## § 7.3 Convexité

**Définition 7.13** (Fonction convexe, fonction concave)

Soit $I$ un intervalle, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

(i) On dit que $f$ est convexe si $\forall x, y \in I$ et $t \in [0,1]$, on a

$$f(\underbrace{(1-t)x + ty}_{\text{n'importe quel point entre } x \text{ et } y}) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$$




(ii) On dit que $f$ est concave si $\forall x, y \in I$ et $t \in [0,1]$, on a

$$f((1-t)x + ty) \geq (1-t)f(x) + tf(y)$$

<u>Théorème 7.15</u> Caractérisation des fonctions convexes.

Soient $I$ un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $f$ est convexe

(ii) $\forall x, y, z \in I$, tq $x < y < z$, on a

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

Si de plus, $I$ est ouvert et $f$ est dérivable ces propriétés sont également équivalentes à

(iii) $f'$ est croissante

(iv) $\forall x, y \in I, \quad f(x) \geq f(y) + f'(y)(x-y)$

Si de plus $f$ est $2\times$ dérivable ces propriétés sont également équivalentes à

(v) $\forall x \in I, \quad f''(x) \geq 0$

# Chapitre 8 Développement limité et séries entières

## § 8.1 Développements limités

**Théorème 8.1**

Soit $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de $x_0$.
Alors, $f$ est dérivable en $x_0$ si et seulement si
$\exists\, m, h \in \mathbb{R}$ et une fonction $r : D \to \mathbb{R}$ t.q.
$r(x_0) = 0$, $\quad \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{r(x)}{x - x_0} = 0$ et

$$f(x) = h + m(x - x_0) + r(x).$$

De plus, on a alors, $h = f(x_0)$, $m = f'(x_0)$